

УТВЕРЖДАЮ:  
Проректор МГУ имени  
М.В. Ломоносова,  
Начальник управления

научной политики и организации  
научных исследований

д.ф.-м.н., профессор А.А. Федянин



« 09 » 2017 г.

## ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу  
Орловой Ирины Валерьевны

**«Циклические полукольца с некоммутативным сложением»,  
представленную к защите на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук по специальности  
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел**

Диссертационная работа Орловой Ирины Валерьевны посвящена исследованию циклических полуколец с некоммутативным сложением. Под полукольцом понимается алгебраическая структура  $\langle S, +, \cdot \rangle$  с двумя бинарными операциями сложения и умножения, такая, что  $\langle S, + \rangle$  – полугруппа,  $\langle S, \cdot \rangle$  – полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. В работе рассматривается строение циклических по умножению полуколец, аддитивная полугруппа которых некоммутативна.

Основным направлением исследований автора является изучение алгебраических свойств и структуры циклических полуколец с некоммутативным сложением.

Основными результатами диссертации можно считать следующие.

1. Выделены специальные классы циклических полуколец. Получена общая классификация циклических полуколец, не принадлежащих к специальным классам.

2. Доказано, что сложение в бесконечных циклических полукольцах с некоммутативным сложением в идемпотентных циклических полукольцах с некоммутативным сложением и поглощающим элементом либо левое, либо правое.

3. Описаны идеалы и конгруэнции циклических полуколец.

4. Идемпотентные циклические полукольца с некоммутативным сложением и нетривиальным циклом сведены к идемпотентным циклическим полукольцам с коммутативным сложением и циклическим полуполям.

5. Получен критерий на сложение, при котором неидемпотентное циклическое полукольцо с некоммутативным сложением сводится к неидемпотентному циклическому полукольцу с поглощающим элементом и циклическому полуполю.



6. Показано, что любую конечную мультипликативную циклическую полугруппу можно превратить в неидемпотентное циклическое полукольцо с некоммутативным сложением.

7. Установлены структурные свойства неидемпотентных циклических полуколец с некоммутативным сложением и коротким хвостом, то есть при  $k \leq n$ . Например, доказано, что сумма трех произвольных элементов полукольца лежит в цикле этого полукольца. Найдены необходимые и достаточные условия для сложения в неидемпотентном циклическом полукольце с некоммутативным сложением и коротким хвостом.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 56 источников и предметного указателя. Объем диссертации составляет 92 страницы.

Во введении изложена история вопроса, поставлены основные задачи, решаемые автором, и сводка результатов по этим задачам. Приведены понятия и обозначения, используемые в диссертации, обсуждается общая мотивировка решаемых задач, проведен обзор литературы по теме диссертации, сформулированы достигнутые результаты и краткое содержание работы.

В первой главе приводятся основные понятия и утверждения теории полуколец, необходимые для дальнейшего изложения. Выделены специальные классы циклических полуколец: циклические полукольца с нулем, циклические полуполя, бесконечные циклические полукольца. Утверждения предложений 1.2.2 и 1.2.3 имеют место для циклических полуколец с коммутативным сложением и являются обобщением для произвольных циклических полуколец. В параграфе 1.3 теорема А является известным результатом о конечных полутелах и существенно используется автором для описания циклических полуполей.

Во второй главе исследованы свойства циклических полуколец, не принадлежащих к специальным классам. Важным результатом является теорема 2.1.1 о том, что цикл произвольного циклического полукольца является циклическим полуполем. Показано, что сложение в циклических полукольцах с неодноэлементным циклом не коммутативно. Получена общая классификация циклических полуколец (предложение 2.1.4), не принадлежащих к специальным классам. Данная классификация позволяет разбить циклические полукольца на четыре класса. Первые три класса имеют простую структуру. Изучению четвертого класса посвящены третья и четвертая главы диссертации. В параграфе 2.2 описаны идеалы и конгруэнции циклических полуколец и найдена их связь с идеалами и конгруэнциями мультипликативных полугрупп этих полуколец.

В третьей главе доказана теорема 3.1.1 о строении идемпотентных циклических полуколец с некоммутативным сложением и поглощающим элементом. Для изучения идемпотентных циклических полуколец с некоммутативным сложением и нетривиальным циклом рассмотрена конгруэнция, образующая из элементов цикла один класс, а из остальных элементов полукольца одноэлементные классы. Центральным результатом третьей главы являются теоремы 3.2.1 и 3.2.2, в которых конечные циклические полукольца с идемпотентным некоммутативным сложением и нетривиальным циклом сведены к конечным циклическим полукольцам с идемпотентным коммутатив-



ным сложением и циклическим полуполям. В качестве следствия из теорем 3.2.1 и 3.2.2 получен результат (предложение 3.2.1) о числе конечных идемпотентных циклических полуколец с некоммутативным сложением и нетривиальным циклом. Для нахождения числа циклических полуколец автор использует компьютерные программы, написанные на языке Си.

В четвертой главе положено начало изучению циклических полуколец с неидемпотентным некоммутативным сложением. Получен критерий на сложение (теорема 4.1.1), при котором неидемпотентное циклическое полукольцо с некоммутативным сложением сводится к неидемпотентному циклическому полукольцу с поглощающим элементом и циклическому полуполю. С помощью программы, написанной на языке Си, найдено число циклических полуколец с неидемпотентным коммутативным и некоммутативным сложением и поглощающим элементом. Теорема 4.2.2 показывает, что любую конечную мультипликативную циклическую полугруппу можно превратить в неидемпотентное циклическое полукольцо с некоммутативным сложением. Теоремы 4.2.1, 4.2.3 и 4.2.4 дают важные структурные свойства изучаемых полуколец. Например, доказано, что сумма трех произвольных элементов полукольца лежит в цикле этого полукольца (теорема 4.2.3). Найдены необходимые и достаточные условия для сложения (теоремы 4.2.1 и 4.2.4) в неидемпотентном циклическом полукольце с некоммутативным сложением и коротким хвостом. Для полного описания циклических полуколец достаточно выяснить их структуру при длинном хвосте и неидемпотентном сложении.

Следует подчеркнуть, что полученные в диссертации результаты представлены последовательно и изложены логично. Чтение диссертации существенно облегчает наличие предметного указателя.

Вместе с тем работа не лишена некоторых недочетов и упущений.

1. При изложении параграфа 2.2 можно было сначала привести известное строение идеалов и конгруэнций мультипликативных циклических полугрупп, а затем проверить, являются ли они полукольцевыми. Заметим, что при выбранном автором подходе строение идеалов и конгруэнций мультипликативных циклических полугрупп вытекает из строения таковых для циклических полуколец.

2. Каждую из глав следовало начинать с формулировки решаемых в ней задач.

3. Желательно было в качестве приложений представить исходные коды компьютерных программ, написанных автором.

Высказанные замечания не снижают достоинств диссертационной работы И.В. Орловой, ее основные положения достаточно полно раскрыты в автореферате и публикациях диссертанта.

На основе вышесказанного можно сделать следующие выводы.

1. Тема диссертации И.В. Орловой важна и актуальна. Работу следует отнести к специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

2. Основные результаты диссертации являются новыми. Решен ряд достаточно трудных естественных задач теории полуколец.

3. Полученные результаты опубликованы в 16 работах, три из которых – в ведущих рецензируемых журналах, определенных Высшей аттестационной



комиссией Министерства образования и науки РФ. Результаты диссертации апробированы на 9 Международных и Всероссийских алгебраических и математических конференциях.

4. В целом диссертация является завершённым научным исследованием, вносящим заметный вклад в данный раздел современной математики.

5. Автореферат диссертации полно и правильно отражает ее содержание.

6. Представленные в диссертации результаты будут востребованы в дальнейших изысканиях по теории полуколец. Она может быть интересна для научных и образовательных учреждений, в которых ведутся исследования по теории колец и полуколец. К их числу относятся Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Казанский (Приволжский) федеральный университет, Уральский федеральный университет, Томский государственный национальный исследовательский университет, Московский педагогический государственный университет. Кроме того, полученные результаты могут служить материалом для различных университетских математических курсов и спецкурсов.

На основании вышеприведенного можно заключить, что диссертация Орловой Ирины Валерьевны соответствует требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по действующему «Положению о порядке присуждения ученых степеней», а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Отзыв на диссертацию заслушан и утверждён на заседании кафедры высшей алгебры Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (протокол №1042 от 25 сентября 2017 г.).

Отзыв составил:

Д.ф.-м.н., проф. кафедры высшей алгебры  
механико-математического  
факультета МГУ

  
Михалёв Александр Васильевич

Зав. кафедрой высшей алгебры  
механико-математического  
факультета МГУ,  
д.ф.-м.н., проф.

  
Абрамов Вячеслав Александрович

Декан механико-математического  
факультета МГУ,  
д.ф.-м.н., проф.

  
Чубариков Владимир Николаевич

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»  
Адрес: 119991, Российская Федерация, Москва, Ленинские горы, д. 1.  
Телефон: (495)9391000. E-mail: info@rector.msu.ru.