На правах рукописи

Медведев Алексей Николаевич

Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург – 2017

Работа выполнена в лаборатории математического анализа ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель:

КИСЛЯКОВ Сергей Витальевич,

доктор физико-математических наук, академик РАН, директор ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

ПАРАМОНОВ Петр Владимирович,

доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории функций и функционального анализа ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»,

ЛЫСОВ Владимир Генрихович,

кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела теоретической математики ФГУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук».

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

Защита состоится «_____» _______________ 2017 г. в __________ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук:

191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан «_____» _______________ 2017 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В диссертации изучается вопрос о сравнении гладкости аналитической в круге или верхней полуплоскости функции и гладкости ее модуля. Классический результат, доказанный, но не опубликованный Карлесоном и Якобсом, а затем переоткрытый и дополненный В. П. Хавиным и Ф. А. Шамояном, говорит нам, что в случае круга типично падение гладкости вдвое. Как само это утверждение, так и все его обобщения, известные до недавнего времени, носили глобальный характер: модуль функции предполагался гладким всюду на окружности, а сама она оказывалась тогда лежащей в «половинном» классе Гёльдера во всем единичном круге.

В диссертации рассматривается «поточечный» или «локальный» вариант той же задачи. Доказанные в ней теоремы примерно укладываются в следующую схему: при некоторых естественных условиях, гёльдерова гладкость модуля аналитической функции всего лишь в одной граничной точке влечет половинную гладкость самой функции в той же точке.

Интерес к задаче о падении гладкости прослеживается в течение всей второй половины 20 века. Поточечная постановка практически не рассматривалась до выхода статьи [1] в 2013 г. и продолжает оставаться перспективной.

Как для локальной, так и для глобальной гладкости, на ответ влияют два обстоятельства: поведение нулей функции и поведение граничных значений логарифма ее модуля. Без каких-либо ограничений на нули гладкость может падать неконтролируемо. Поэтому обычно рассматривают либо случай внешних функций («полное отсутствие нулей» в довольно сильном смысле), либо же запрещают нулям функции накапливаться к границе касательным образом. В обоих случаях гладкость падает не более чем вдвое (см. [5–8]), причем результат точен. В то же время, влияние логарифма модуля на ответ целесообразно изучать как раз для внешних функций («внутренняя часть» аналитической функции по модулю равна единице п.в. на границе). Отметим, что в рассматриваемом круге задач логарифм граничных значений изучаемой функции суммируем автоматически. Однако, в работе 2013 года [9] Н. А. Широков доказал, что можно гарантировать гладкость порядка $p\alpha/(p+1)$ для внешней функции в круге с модулем из Lip_α ($\alpha > 0$), если логарифм ее модуля лежит в L^p на границе. В предельном случае, когда логарифм принадлежит L^∞, гладкость не падает вовсе (следствие известной теоремы Зигмунда–Привалова). С другой стороны, интересен второй результат статьи [9], утверждающий что падения гладкости не наблюдается и если логарифм принадлежит пространству функций ограниченной средней осцилляции на окружности $BMO(\mathbb{T})$. При $0 < \alpha < 1$ это последнее утверждение было установлено ранее в [10]. В связи с этим, встает вопрос о достаточных условиях для падении гладкости в фиксированном отношении и об их точности. В диссертации получены не только поточечные версии описанных результатов, но и существенно дополнена шкала точных достаточных условий.

Все упомянутые выше результаты касались круга. Перенести их автоматически на аналитические функции в верхней полуплоскости невозможно по понятным причинам, так что этот случай требует отдельного изучения. До работы автора [4] этого не делалось (исключение — частный случай, рассмотренный в [7]). Полученные в диссертации результаты позволяют надеяться и на дальнейшее развитие данного сюжета.

Цели и результаты диссертационной работы. Ключевым является вопрос о сравнении гладкости аналитической функции из класса Неванлинны в круге или верхней полуплоскости и гладкости ее модуля в одной и той же точке границы. В основном мы ограничимся случаем, когда аналитическая функция является внешней. В диссертации приводится точное обоснование данного выбора. Кроме того, будет рассматриваться лишь случай, когда гладкость модуля функции не превышает двух. При более высоких гладкостях в локальной постановке возникают трудности, преодолеть которые пока не удалось. Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем.

1. Показано, что гёльдерово условие порядка не выше двух (не обязательно степенного типа) на модуль внешней функции в круге в одной точке гарантирует для самой функции вдвое меньшую гладкость в той же точке в некотором интегральном смысле.

2. Если внешняя функция обладает гладкостью не выше 1 в одной граничной точке, найдены точные достаточные условия, гарантирующие падение гладкости самой функции не более, чем в фиксированном отношении.

3. Установлено, что аналогичные результаты для случая гладкости порядка меньше 1 имеют место и для внешних функций в верхней полуплоскости. Там, однако, падение гладкости наблюдается лишь на близких расстояниях от точки, в которой измеряется гладкость, а также сам порог, начиная с которого наступает упомянутое падение гладкости, зависит от положения точки на границе.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть полезны при решении родственных задач теории гладких аналитических функций.

Методология и методы исследования. Результаты были получены с помощью техники из теории сингулярных интегральных операторов типа Кальдерона–Зигмунда. Локальная гладкость функции на границе измеряется в терминах средних осцилляций или средних разностей по дугам, содержащим фиксированную точку.

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты, которые выносятся на защиту, являются математически достоверными фактами. Они были опубликованы в рецензируемых журналах, а их доказательства неоднократно проверялись специалистами в той области, к которой эти результаты относятся. Результаты диссертации докладывались на общегородском семинаре по линейному и комплексному анализу в Санкт-Петербурге.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в работах [1–4], из них 3 статьи ([1, 3, 4]) напечатаны в рецензируемых журналах, которые входят в список ВАК, в то время как статья [2] является препринтом.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и библиографии. Общий объем диссертации составляет 91 страницу. Библиография содержит 32 наименования, в число которых включены четыре работы автора по теме диссертации.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения. Также присутствует достаточно полный исторический обзор.

Рассмотрим неотрицательную 2π-периодическую функцию φ, для которой $\log\varphi \in L^1$. Граничные значения внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$, построенной по φ, задаются формулой $\mathcal{O}_\varphi(x) = \varphi(x)\exp(i(\mathcal{H}\log\varphi)(x))$, где

$$\mathcal{H}\log\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} p.v. \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg}\left(\frac{x-t}{2}\right)\log\varphi(t)dt.$$

В непериодическом случае (верхняя полуплоскость) формула та же, но оператор другой (плюс условие $\log\varphi \in L^1(dt/(1+t^2))$):

$$\mathcal{H}\log\varphi(x) = \frac{1}{\pi} p.v. \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x-t} + \frac{t}{1+t^2}\right)\log\varphi(t)dt.$$

В **разделе 0.1** описывается как измерять гладкость функций в терминах средних осцилляций, либо с помощью усредненных конечных разностей.

Определение. Рассмотрим некоторое симметричное пространство функций $\mathbb{W}$. Средняя осцилляция функции f по отрезку I в норме пространства $\mathbb{W}$ —

это число

$$\Omega_{\mathbb{W}}(f, I) = \inf_c \frac{\||f - c|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}{\|\chi_I\|_{\mathbb{W}}}, \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всем постоянным c. В частном случае $\mathbb{W} = L^r$, $r \in [1, \infty)$, средняя осцилляция принимает вид

$$\Omega_r(f, I) = \inf_c \left(\frac{1}{|I|} \int\limits_I |f - c|^r \right)^{1/r}. \tag{2}$$

Симметричные пространства функций обсуждаются в разделе 1.1. Средние осцилляции по норме произвольного симметричного пространства рассматриваются только в главе 1, в то время как в главе 3 используются упрощенные версии — $\Omega_r(f, I)$.

«Среднюю» гладкость функции в точке x порядка меньше единицы можно описывать условием

$$\Omega_{\mathbb{W}}(f, I) \le \omega(|I|), \tag{3}$$

которое должно быть выполнено для всякого отрезка I, содержащего точку x. Для 2π-периодических функций f естественно считать здесь, что, например, $|I| \le 4\pi$.

Для случая гладкости между 1 и 2 среднюю гладкость в точке удобно измерять иным способом:

$$\left(\frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} |\Delta^n f(x, t)| \, dt \right)^{1/r} \le \omega(h), \tag{4}$$

где n-я разность Δ^n определяется по формулам

$$\begin{gathered} \Delta^1 f(x, t) = f(x + t) - f(x), \\ \Delta^{n+1} f(x, t) = \Delta^n f(x + t, t) - \Delta^n f(x, t), \quad n \ge 1, \end{gathered} \tag{5}$$

а параметр r фиксирован (и снова h не слишком большое для 2π-периодических функций). Ввиду упомянутого выше ограничения на порядок гладкости, условия типа (4) рассматриваются для $n = 1$ и $n = 2$, причем условие (4) с $n = 1$

влечет оценку для средних осцилляций (3) с пространством L^r и той же мажорантой ω.

В **разделе 0.2** обсуждаются типы условий, которые накладываются в диссертации на модуль внешней функции φ, с целью установить оценки типа (3) и (4) для самой внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$.

Определение. Назовем мажорантой типа k-го модуля непрерывности непрерывную неотрицательную неубывающую функцию ω на $[0, \infty)$, для которой $\omega(0) = 0$, а функция $t^{-k}\omega(t)$ является почти убывающей, т.е. для всяких значений $t_1 \le t_2$ выполнено неравенство

$$\frac{\omega(t_2)}{t_2^k} \lesssim \frac{\omega(t_1)}{t_1^k}, \tag{6}$$

с некоторой универсальной постоянной.

В диссертации рассматриваются лишь мажоранты типа 1-го и 2-го модулей непрерывности.

Определение. Мажоранту типа 1-го модуля непрерывности ω назовем 1-мажорантой, если для всех δ выполнены неравенства

$$\int\limits_0^\delta \frac{\omega(u)}{u} du \lesssim \omega(\delta); \quad \delta \int\limits_\delta \frac{\omega(u)}{u^2} du \lesssim \omega(\delta). \tag{7}$$

Определение. Мажоранту типа 2-го модуля непрерывности ω назовем $[1, 2]$-мажорантой, если функция $t^{-1}\omega(t)$ является почти возрастающей, т.е. для любых $t_1 \le t_2$ выполнено соотношение

$$\frac{\omega(t_1)}{t_1} \lesssim \frac{\omega(t_2)}{t_2}. \tag{8}$$

Рассмотрим функцию f, непрерывную в некоторой точке $x \in \mathbb{R}$. Говоря о ее «обычной» гладкости порядка меньше 1 в точке x, мы будем считать, что выполнено неравенство

$$|f(y) - f(x)| \le \omega(|y - x|), \tag{9}$$

по всем y в случае прямой, и для таких y, что $|x-y| \leq 4\pi$, в 2π-периодическом случае; а мажоранта ω — 1-мажоранта.

Условие на «обычную» гладкость порядка между 1 и 2 функции f в точке x зададим следующим образом: считаем что выполнено неравенство

$$|f(y) - f(x) - by| \leq \omega(|y-x|), \tag{10}$$

по всем y в случае прямой, и для таких y, что $|x-y| \leq 4\pi$, в 2π-периодическом случае; с некоторой постоянной b и $[1,2]$-мажорантой ω.

В **разделе** 0.3 формулируются и обсуждаются основные результаты глав 1 и 2, а в **разделе** 0.4 — главы 3.

Завершает введение **раздел** 0.5, в котором доказаны три утверждения, позволяющие перейти от представленных в диссертации поточечных оценок на гладкость внешней функции в интегральных терминах к результатам о ее гладкости в «обычном» равномерном смысле.

Оценки средних осцилляций. Пусть ω_0 — неотрицательная возрастающая функция на $[0,\infty)$, равная нулю только в нуле.

Утверждение 1. *Пусть функция g — измеримая функция, а Q — отрезок (в 2π-периодическом случае считаем $|Q| \leq 2\pi$). Предположим, что $\Omega_r(g, I) \leq \omega_0(|I|)$ для всех промежутков I, содержащих какую-нибудь точку отрезка Q (опять, в 2π-периодическом случае не слишком больших, т.е. $|I| \leq 4\pi$). Тогда, если ω_0 — 1-мажоранта, то функцию g можно исправить на множестве меры ноль до непрерывной (во всех точках отрезка Q), причем будет выполнено неравенство $|g(x_1) - g(x_2)| \lesssim \omega_0(|x_1 - x_2|)$ при всех x_1 и x_2 из Q.*

Оценки усредненных разностей. Мы ограничимся лишь 2π-периодическим случаем. Теперь предположим, что для функции g выполнено условие

$$\left(\frac{1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} |\Delta^2 g(x,t)|^r \, dt \right)^{1/r} \leq \omega_0(h), \quad 0 \leq h \leq 4\pi, \tag{11}$$

для всех точек x с одной и той же мажорантой типа 2-го модуля непрерывности ω_0. Если ω_0 не является $[1,2]$-мажорантой, то следующее утверждение сводит ситуацию к случаю оценок средних осцилляций.

Утверждение 2. *Пусть g — 2π-периодическая измеримая функция, причем $|g| \le L$ всюду. Фиксируем точку x и обозначим*

$$\Delta(h) = \left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} |\Delta^2 g(x,t)|^r \, dt\right)^{1/r}, \quad \varkappa(h) = \left(\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} |\Delta^1 g(x,t)|^r \, dt\right)^{1/r},$$

тогда

$$\varkappa(\xi) \le \frac{L}{2^{k-1}} + \frac{1}{2}\sum_{s=0}^{k-1} \frac{\Delta(2^s\xi)}{2^s}, \quad 0 \le \xi \le \frac{\pi}{2},$$

где k — наибольшее натуральное число такое, что $2^k\xi \le \pi$.

Если же ω_0 оказалась $[1,2]$-мажорантой, то работает следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть функция g такая же, как и раньше. Дополнительно предположим, что $g \in C^2$. Тогда для каждого отрезка $|I|$, $|I| < 2\pi$, найдется такой линейный полином ρ_I, что $\sup_{x\in I} |g(x) - \rho_I(x)| \lesssim \omega(|I|)$.*

Отметим, что на практике это утверждение приходится применять к негладким априори функциям, но возникающие здесь трудности легко обходятся.

Первая глава посвящена случаю внешней функции в круге и условий на гладкость порядка не выше 1 для ее модуля в точке.

В **разделе** 1.1 кратко излагается необходимая информация о симметричных пространствах; за подробностями можно обратиться к [11–13].

Определение. Банахово пространство $\mathbb{X}$ измеримых почти всюду конечных вещественнозначных функций на $[-\pi,\pi]$ называется симметричным, если для любых измеримых функций f, g выполнены следующие два свойства:

(S1) если $|f| \le |g|$ п.в. и $g \in \mathbb{X}$, то $f \in \mathbb{X}$ и $\|f\|_{\mathbb{X}} \le \|g\|_{\mathbb{X}}$;

(S2) если $f \in \mathbb{X}$, а $|f|$ и $|g|$ равноизмеримы, то $g \in \mathbb{X}$ и $\|f\|_{\mathbb{X}} = \|g\|_{\mathbb{X}}$.

Определение. Функция $\Phi_{\mathbb{X}}(t)$, заданная по формуле $\Phi_{\mathbb{X}}(t) = \|\chi_{(-t/2,t/2)}\|_{\mathbb{X}}$, $t \in (0, 2\pi)$, называется фундаментальной функцией симметричного пространства $\mathbb{X}$.

Далее, обсуждается вопрос об ограниченности оператора гармонического сопряжения на симметричном пространстве. Это аналог известной теоремы Бойда, для применения которой необходимо вычислить индексы Бойда. Обычно они определяются для симметричных пространств на отрезке $[0, 1]$ (либо для луча). Однако, существует естественный способ приписать индексы Бойда пространствам на отрезках, отличных от $[0, 1]$, который в диссертации обсуждается в **подразделе 1.1.1**. Упомянутая же выше теорема и сопутствующие ей определения приводятся в **подразделе 1.1.2**.

Для $t > 0$ рассмотрим *оператор растяжения* D_t, действующий на функцию $f \in \overline{\mathbb{X}}$ по формуле

$$(D_t f)(s) = \begin{cases} f(st), & 0 \le s \le \min(1, 1/t); \\ 0, & \min(1, 1/t) \le s \le 1. \end{cases}$$

Определение. Обозначим через $\overline{\alpha}_{\mathbb{X}} := \lim\limits_{t\to\infty} \log \|D_{1/t}\|_{\overline{\mathbb{X}}\to\overline{\mathbb{X}}} / \log t$ и $\underline{\alpha}_{\mathbb{X}} := \lim\limits_{t\to 0} \log \|D_{1/t}\|_{\overline{\mathbb{X}}\to\overline{\mathbb{X}}} / \log t$ верхний и нижний *индексы Бойда* соответственно. Будем говорить, что симметричное пространство $\mathbb{X}$ удовлетворяет условию Бойда, если $\underline{\alpha}_{\mathbb{X}} > 0$, и $\overline{\alpha}_{\mathbb{X}} < 1$.

Теорема (Д. Бойда)**.** *Оператор $\mathcal{H} : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ ограничен тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}$ удовлетворяет условию Бойда.*

В **подразделе 1.1.3** объясняется, как использовать утверждение 1 для получения равномерного следствия из приводимой ниже теоремы 1.

В **разделе 1.2** формулируется основной результат главы 1 и проводится его анализ. Рассмотрим некоторое симметричное пространство $\mathbb{X}$ с вогнутой фундаментальной функцией $\Phi_{\mathbb{X}}$. Пусть φ — измеримая неотрицательная

2π-периодическая функция, удовлетворяющая условию $\log\varphi \in \mathbb{X}$, а также непрерывная в некоторой точке x и подчиненная там условию (9) с 1-мажорантой ω.

Теорема 1. *Для любого симметричного пространства $\mathbb{W}$, удовлетворяющего условию Бойда, найдется пороговая постоянная A, зависящая только от ω и $\varphi(x)$, и при этом равная 0 для $\varphi(x) = 0$, такая, что для каждого промежутка $I \ni x$, $|I| \le 4\pi$, справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $|I| > A$, то $\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega(|I|)$.*

2. *Если $|I| \le A$, то $\Omega_{\mathbb{W}}(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega(|I|) + \omega(\psi_{\mathbb{X}}(|I|))$.*

Постоянные в оценках зависят только от $\|\log\varphi\|_{\mathbb{X}}$, ω и $\|\mathcal{H}\|_{\mathbb{W}\to\mathbb{W}}$, а функция $\psi_{\mathbb{X}}$ — обратная к функции $R_{\mathbb{X}}(u) = u\Phi_{\mathbb{X}}(u)$.

Следствие 1. *Рассмотрим некоторое симметричное пространство $\mathbb{X}$. Пусть функция φ удовлетворяет условию (9) равномерно во всех точках с одной и той же 1-мажорантой ω, а также $\log\varphi \in \mathbb{X}$. Тогда функцию $\mathcal{O}_\varphi$ можно исправить на множестве меры ноль таким образом, что имеет место оценка*

$$|\mathcal{O}_\varphi(x) - \mathcal{O}_\varphi(y)| \lesssim \omega(\psi(|x-y|))$$

по всем x, y, скажем, $|x-y| \le 2\pi$, где ψ — обратная к функции $R_{\mathbb{X}}(u) = u\Phi_{\mathbb{X}}(u)$. Постоянная в оценке выше зависит только от $\|\log\varphi\|_{\mathbb{X}}$ и ω.

В **подразделах 1.2.2–1.2.4** описываются пространства, которые имеют заданную фундаментальную функцию (а значит у них будет один и тот же показатель в оценке, приведенной в теореме 1); построен пример, доказывающий точность найденного показателя падения гладкости; приводятся некоторые примеры симметричных пространств и соответствующих им показателей падения гладкости.

Раздел 1.3 посвящен доказательству теоремы 1.

В **разделе 1.4** приводится пример рассуждений, позволяющих перейти от точечных оценок для внешних функций к случаю произвольных аналитических функций, непрерывных вплоть до границы.

Результаты первой главы опубликованы в работах [1] и [3].

Во второй главе рассматривается случай внешней функции в круге, модуль которой обладает гладкостью между 1 и 2 в одной точке.

Теорема 2. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условию* (10) *в точке* x *с* $[1, 2]$*-мажорантой* ω*, а также* $\log\varphi \in L^p$ *Тогда для всякого* $r > 1$ *справедливы утверждения:*

(1) *если* $\varphi(x) = 0$*, то функция* $\mathcal{O}_\varphi$ *удовлетворяет условию* (4) $(n = 2)$ *с мажорантой, пропорциональной* ω*;*

(2) *если* $\varphi(x) > 0$*, то функция* $\mathcal{O}_\varphi$ *удовлетворяет условию* (4) $(n = 2)$ *с мажорантой, пропорциональной* $\omega(\cdot) + \omega((\cdot)^\beta)$*;*

при этом коэффициент пропорциональности во второй оценке зависит только от $\|\log\varphi\|_{L^p}$*,* ω *и* $\|\mathcal{H}\|_{L^r\to L^r}$*, в то время как в первой он равен единице, а показатель* β *равен* $p/(p+1)$*.*

Следствие 2. *Пусть функция* φ *удовлетворяет условию* (10) *равномерно во всех точках с одной и той же* $[1, 2]$*-мажорантой* ω*, а также* $\log\varphi \in L^p$*. Пусть* $\beta = p/(p+1)$*. Тогда функцию* $\mathcal{O}_\varphi$ *можно исправить на множестве меры ноль так, что будут верны следующие утверждения.*

(1) *Если функция* $\omega((\cdot)^\beta)$ *будет также* $[1, 2]$*-мажорантой, то имеет место оценка* $|\Delta^2 g(x, t)| \lesssim \omega(|t|^\beta)$ *по всем* x *и* $|t| \le \pi/2$*.*

(2) *Если же функция* $\omega((\cdot)^\beta)$ *окажется* 1*-мажорантой, то имеем оценку* $|\mathcal{O}_\varphi(x) - \mathcal{O}_\varphi(y)| \lesssim \omega((|x-y|)^\beta)$*.*

Опять же, постоянные зависят только от $\|\log\varphi\|_{L^p}$ *и* ω*.*

Результаты второй главы представлены в работах [1] и [2].

В третьей главе обсуждается случай внешней функции в верхней полуплоскости и условий на гладкость ее модуля в точке порядка меньше 1. Уделяется внимание отличиям от случая круга.

Теорема 3. *Пусть дана некоторая неотрицательная функцию φ, для которой $\log\varphi \in L^1(dt/(1+t^2))$. Предположим, что φ удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условию (9) с 1-мажорантой ω, и пусть еще $r > 1$. Тогда для любого промежутка $I \ni x$ выполнено следующее: если $\varphi(x) = 0$, то $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \le \omega(|I|)$, иначе существуют постоянные A^1 и A^2, зависящие от значения $\varphi(x)$ и мажоранты ω, с перечисленными ниже свойствами.*

(1) *Если $|I| \ge A^1$, то $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim \omega(|I|)$.*

(2) *Если $A^2 \le |I| \le A^1$, то $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim (\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|}))$.*

(3) *Если $|I| \le A^2$, то $\Omega_r(\mathcal{O}_\varphi, I) \lesssim M_x(\omega(|I|) + \omega(\sqrt{|I|}))$.*

Постоянные в оценках выше зависят только от ω и $\|\log\varphi\|_{L^1(dP)}$, а $M_x = \max\{1, x^2\}$.

В отличие от случая круга, это не «падение гладкости вдвое» даже в интегральном смысле, так как на малых длинах промежутков I в полученной оценке доминирует слагаемое $\omega(\sqrt{|I|})$, а на больших, наоборот — $\omega(|I|)$; далее, в оценку «вкралось» выражение M_x, которое становится неограниченным при $x \to \infty$. Все это накладывает отпечаток на приведенные ниже «равномерные» следствия.

Следствие 3. *Предположим, что условие (9) выполнено для всех точек x некоторого промежутка $J \subset \mathbb{R}$ с 1-мажорантой ω. Тогда для $\mathcal{O}_\varphi$ верна оценка $|\mathcal{O}_\varphi(x) - \mathcal{O}_\varphi(y)| \lesssim \omega(|x-y|) + \omega(\sqrt{|x-y|})$ по всем $x, y \in J$, с постоянной, зависящей от J, от ω и от $\|\log\varphi\|_{L^1(dP)}$.*

Следствие 4. *Предположим, что* $\varphi \in Lip_\omega(\mathbb{R})$, *где* ω *— некоторая 1-мажоранта. Тогда для всякой точки* x, *для которой* $\varphi(x) > 0$, *найдется такой промежуток* J_x, *что* $\mathcal{O}_\varphi \in Lip_{\omega(\cdot)+\omega(\sqrt{\cdot})}(J_x)$, *причем с универсальной* $Lip_{\omega(\cdot)+\omega(\sqrt{\cdot})}$*–постоянной, обусловленной теми же параметрами, что и в следствии* 3 *(кроме параметра* $|J_x|$, *от которого не зависит).*

Результаты третьей главы опубликованы в работе [4].

Список публикаций автора по теме диссертации

1. Васин А. В., Кисляков С. В., Медведев А. Н. Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля // Алгебра и анализ. — 2013. — Т. 25, № 3. — С. 52–85.
2. Медведев А. Н. О гёльдеровом условии в граничной точке для аналитической функции: общие модули гладкости порядка не выше 2. — 2017. — Препринт ПОМИ номер 4.
3. Медведев А. Н. Падение гладкости внешней функции в сравнении с гладкостью ее модуля при дополнительных ограничениях на величину граничной функции // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2015. — Т. 434. — С. 101–115.
4. Медведев А. Н. Сравнение граничной гладкости аналитической функции и ее модуля для верхней полуплоскости // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — Т. 447. — С. 75–89.

Цитированная литература

5. Хавин В. П., Шамоян Ф. А. Аналитические функции с липшицевым модулем граничных значений // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1970. — Т. 19. — С. 237–239.
6. Хавин В. П. Обобщение теоремы Привалова-Зигмунда о модуле непрерывности сопряженной функции // Изв. АН АрмССР. Сер.мат. — 1971. — Т. 6. — С. 252–258; 265–287.
7. Brennan J. Approximation in the mean by polynomials on non Caratheodory domains // Ark. Mat. — 1977. — Vol. 15, no. 1. — P. 117–168.
8. Shirokov N. A. Analytic Functions Smooth up to the Boundary. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988. — Vol. 1312 of Lecture Notes in Math.
9. Широков Н. А. Достаточные условия для гёльдеровской гладкости функции // Алгебра и анализ. — 2013. — Т. 25, № 3. — С. 200–206.
10. Бомаш Г. Я. Множества пика для аналитических классов Гёльдера // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1987. — Т. 157. — С. 129–136.
11. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. — Москва : Наука, 1978.
12. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of operators. — London : Academic Press, 1998. — P. 469.
13. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces 2, Function spaces. — Berlin : Springer-Verlag, 1979.